



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

**TEMA: CONJUNTOS ACOTADOS
DENSIDAD EN $\mathbb{R}$
OPERACIÓN BINARIA**



CONJUNTOS ACOTADOS

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$

X es acotado superiormente si y sólo si, $\exists a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X, x \leq a$

Cada a con esta propiedad se denomina cota superior de X .

Ejemplo

$\mathbb{Z}^-$ es acotado superiormente pues $\exists -1 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{Z}^-, x \leq -1$

Un elemento $a \in \mathbb{R}$ se llama supremo de X , cuando a es la menor de las cotas superiores de X

CONJUNTOS ACOTADOS

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$

X es acotado inferiormente si y sólo si, $\exists b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X, b \leq x$

Cada b con esta propiedad se denomina cota inferior de X .

Ejemplo

$\mathbb{N}$ es acotado inferiormente pues $\exists 1 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{N}, 1 \leq x$

Un elemento $b \in \mathbb{R}$ se llama infimo de X , cuando b es la mayor de las cotas inferiores de X

CONJUNTOS ACOTADOS

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$

X es acotado cuando está acotado superior e inferiormente, esto es, cuando existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $X \subset [a; b]$

Ejemplos

El conjunto $A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ es acotado, $A \subset [1; 2]$

Una cota superior del conjunto $B = \{ xy \mid x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1 \}$ es $\frac{2}{3}$

$$x^2 > 0, \quad y^2 > 0, \quad \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}, \quad \frac{1}{2} \geq xy$$

$$B = \left\{ xy \mid xy \leq \frac{1}{2} \right\} \quad xy \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

DENSIDAD EN $\mathbb{R}$

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$

X es denso en $\mathbb{R}$ si y sólo si, $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists x \in X \mid a < x < b$

(En todo intervalo abierto no vacío
existe al menos un elemento de X)

Ejemplo

$\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

$\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ ES DENSO EN $\mathbb{R}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, dado que $\frac{1}{b-a} > 0$, por el principio

Arquimediano $\exists n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{b-a} < n$, de lo cual $\frac{1}{n} < b-a$,

Sea $p \in \mathbb{Z}$ el máximo entero na , se sigue que $p \leq na < p+1$,

$$a < \frac{p+1}{n} \wedge \frac{p}{n} \leq a, \text{ luego } a < \frac{p+1}{n} < b$$

$$\text{Finalmente, } \exists x = \frac{p+1}{n} \mid a < x < b$$

$\mathbb{I}$ ES DENSO EN $\mathbb{R}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, se sigue que $\frac{a}{\sqrt{3}} < \frac{b}{\sqrt{3}}$,

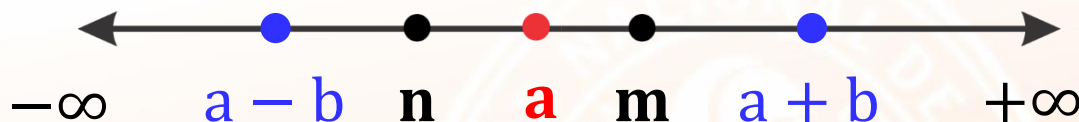
Por la demostración anterior, $\exists r \in \mathbb{Q}^* \mid \frac{a}{\sqrt{3}} < r < \frac{b}{\sqrt{3}}$

de donde $a < \sqrt{3}r < b$, luego $\exists x = \sqrt{3}r \in \mathbb{I} \mid a < x < b$

Ejercicio

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

¿Existen $m \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{I}$ tal que $0 < m - a < b$ y $-b < n - a < 0$?



Sean

$a \in \mathbb{R}$, $a + b \in \mathbb{R}$, dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R} \rightarrow \exists m \in \mathbb{Q} / a < m < a + b$

$$0 < m - a < b$$

$a \in \mathbb{R}$, $a - b \in \mathbb{R}$, dado que $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R} \rightarrow \exists n \in \mathbb{I} / a - b < n < a$

$$-b < n - a < 0$$

OPERACIÓN BINARIA

Una operación binaria o ley de composición interna, en un conjunto no vacío A es una aplicación de $A \times A$ en A , es decir la correspondencia que asocia a cada par ordenado de elementos de A un único elemento de A .

Si representamos por $*$ a esta aplicación, la imagen de $(a; b)$ será denotado por $a * b$, es decir

$$* : A \times A \rightarrow A$$

$$(a; b) \rightarrow a * b$$

Ejemplo 01

La adición $(+)$ y la multiplicación $(\cdot)$ usual, son operaciones binarias en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2

Dado $A = \mathbb{R}^+$ y la operación binaria $*$ definida por la suma usual de números reales positivos,

$$a * b = a + b, \quad \forall a; b \in \mathbb{R}^+$$

entonces $*$ satisface las propiedades conmutativa y asociativa.

CONMUTATIVA

$$a * b = b * a$$

pues $a + b = b + a$ en $\mathbb{R}^+$.

ASOCIATIVA

$$(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{pues } (a * b) * c = (a + b) * c = (a + b) + c$$

$$a * (b * c) = a + (b * c) = a + (b + c)$$

Clausura o cerradura

Sea A un conjunto no vacío y una operación $*$, se dice que la operación es cerrada en A si $\forall a, b \in A, a * b \in A$.

Ejemplo 02

Si en $A = \{1; 2; 3; 4\}$, se define la operación $*$ por $a * b = \text{MCD}(a; b)$

$*$ puede definirse mediante la siguiente tabla de doble entrada

$*$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	1
4	1	2	1	4

Notamos que esta operación satisface la propiedad de clausura.

Asociatividad

Sea A un conjunto no vacío y una operación $*$, se dice que la operación es asociativa en A si se cumple :

$$\forall a, b, c \in A \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

Ejemplo 03

Sea $A = \mathbb{R}$, definimos la operación $*$ por la regla

$$a * b = ab + a + b, \forall a; b \in \mathbb{R}$$

La operación así definida es asociativa, pues se verifica que $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$, veamos:

- $(a * b) * c = (ab + a + b) * c = (ab + a + b).c + ab + a + b + c$
 $= abc + ac + bc + ab + a + b + c$
- $a * (b * c) = a * (bc + b + c) = a(bc + b + c) + a + bc + b + c$
 $= abc + ab + ac + bc + a + b + c = (a * b) * c$

Conmutatividad

Sea A un conjunto no vacío y una operación $*$, definida en A se dice que la operación es conmutativa en A si se cumple :

$$\forall a, b \in A: a * b = b * a$$

Ejemplo 04

Sea $*$, una operación definida sobre $\mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$a * b = a + b + ab$$

Dado que $a + b + ab = b + a + ba$, esta operación es conmutativa,

luego,
$$a * b = b * a$$

Observación 01

Si $A = \{a; b; c\}$ y la operación $*$ en A definida mediante la siguiente tabla de doble entrada

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

La operación es conmutativa, si la matriz de resultados es una matriz simétrica (siempre que los elementos del conjunto se operan ordenadamente).

Elemento neutro

Sea $A \neq \emptyset$ y una operación $*$ definida en A , un elemento $e \in A$ se llama elemento neutro respecto a la operación $*$ si se cumple:

$$\forall a \in A: a * e = e * a = a$$

Si en $(A, *)$ existe un elemento neutro, este es único

Ejemplo 05

En $(\mathbb{Z}, +)$, el número 0 es el elemento neutro.

En $(\mathbb{R}, \otimes)$, tal que $a \otimes b = a + b - 3$ el elemento neutro es 3.

En $(\mathbb{R}, \cdot)$, el número 1 es el elemento neutro.

Observación 02

Si $A = \{a; b; c; d\}$ y la operación $*$ es definida en A mediante la siguiente tabla de doble entrada, ubicamos en la tabla una columna igual a la columna de entrada y una fila igual a la fila de entrada.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

La intersección de la columna y la fila mencionada nos dará el elemento neutro e .

Observando la intersección, concluimos que $e = a$.

Observación 03

Una operación $*$ en un conjunto $A = \{a; b; c\}$ puede tener elemento neutro, pero no necesariamente ser conmutativa.

Considere $*$ definida mediante la siguiente tabla de doble entrada

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	a	c	b

$*$ tiene elemento neutro que es b, pero no es conmutativa.

Elemento inverso

Sea A un conjunto no vacío y una operación $*$ en A . Si $e \in A$ es el elemento neutro, se dice que $a \in A$ posee inverso si existe otro elemento en A denotado por a^{-1} tal que

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Sea $*$ una operación binaria asociativa definida en A con elemento neutro e . Si un elemento $a \in A$ posee inverso, este es único.

Ejemplo 06

En $(\mathbb{Q}, +)$, el inverso de 2 es -2 .

En $(\mathbb{Q}, \otimes)$, tal que $a \otimes b = a + b - 3$, el inverso de 0 es 6.

En $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, el inverso de 2 es $1/2$.

Ejemplo 07

En $A = \{1; 2; 3; 4\}$, se define la operación $*$, mediante la siguiente tabla de doble entrada

$*$	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Notamos que $e = 3$ y además $1^{-1} = 1$, $4^{-1} = 2$, $2^{-1} = 4$, $3^{-1} = 3$

Ejercicio 01

En $\mathbb{R}$, se define la operación $*$ de la siguiente forma $a * b = a + b - 1$. Determine el valor de verdad e indique la secuencia correcta, sobre las siguientes proposiciones.

- I. $*$ es conmutativa II. $*$ es asociativa III. $*$ tiene elemento neutro

Resolución

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

- I. (V) $a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a$
- II. (V) $(a * b) * c = (a + b - 1) * c = (a + b - 1) + c - 1 = a + b - 1 + c - 1$
 $= a + (b + c - 1) - 1 = a + (b * c) - 1 = a * (b * c)$
- III. (V) De I. $*$ es conmutativa, $e \in \mathbb{R}$ es elemento neutro si $a * e = a$
Si $a + e - 1 = a$ entonces $e = 1$.

Ejercicio 02

En $\mathbb{Z}$, se define la operación $*$ por $a * b = a + b - 3$. Calcule

$$L = 2 \left(\frac{2^{-1} + 3^{-1}}{4^{-1}} + 0^{-1} \right)$$

Resolución

Sea $a \in \mathbb{Z}$, ya que $*$ es conmutativa

$e \in \mathbb{Z}$ es elemento neutro si $a * e = a$

Si $a + e - 3 = a$ entonces $e = 3$

Además, a posee inverso si existe a^{-1} tal que $a * a^{-1} = 3$, esto es

$$a + a^{-1} - 3 = 3, \quad a^{-1} = 6 - a$$

Se sigue que

$$2^{-1} = 4, \quad 3^{-1} = 3, \quad 4^{-1} = 2 \quad \text{y} \quad 0^{-1} = 6$$

Al reemplazar los valores obtenidos

$$L = 2 \left(\frac{4 + 3}{2} + 6 \right) = 19$$

Ejercicio 03

En $\mathbb{R}_0^+ = [0; +\infty)$ se define la operación $*$ de la siguiente forma

$$a * b = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

Determine el valor de verdad e indique la secuencia correcta, sobre las siguientes proposiciones.

I. $*$ es conmutativa

II. $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, a * b \geq 0$

III. $*$ no tiene elemento neutro

Resolución

Sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow$

$$a * b = \text{máx}\{a; b\}$$

$$\text{I. (V) } a * b = \text{máx}\{a; b\} \\ = \text{máx}\{b; a\} = b * a$$

$$\text{II. (V) } a * b = \text{máx}\{a; b\} \geq 0$$

$$\text{III. (F) } e = 0$$

Ejercicio 04

En $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$, se define la operación $*$ de la siguiente forma

$*$	0	2	4	6	8
0	4	6	8	0	2
8	2	4	6	8	0
6	0	2	4	6	8
4	8	0	2	4	6
2	6	8	0	2	4

Calcule

$$E = [(2^{-1} * 6^{-1})^{-1} * (6 * 8^{-1})^{-1}] * 4^{-1}$$

Resolución

Al ordenar la tabla de doble entrada

$*$	0	2	4	6	8
0	4	6	8	0	2
2	6	8	0	2	4
4	8	0	2	4	6
6	0	2	4	6	8
8	2	4	6	8	0

Notamos que $e = 6$, $2^{-1} = 0$,

$$6^{-1} = 6, \quad 8^{-1} = 4 \quad \text{y} \quad 4^{-1} = 8$$

$$E = [(0 * 6)^{-1} * (6 * 4)^{-1}] * 8$$

$$= (2 * 8) * 8 = 6$$

Ejercicio 05

En $A \subset \mathbb{N}$ se define $*$ mediante la tabla

$*$	5	7	11	17	...
4	21	24	30	39	...
6	24	27	33	42	...
10	30	33	39	48	...
16	39	42	48	57	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Calcule $E = 24 * 25$

Resolución

Al completar la tabla de doble entrada

$*$	5	7	11	17	25	...
4	21	24	30	39	51	...
6	24	27	33	42	54	...
10	30	33	39	48	60	...
16	39	42	48	57	69	...
24	51	54	60	69	81	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Piden $E = 24 * 25 = 81$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio

01

Dado el conjunto $A = \mathbb{Q} - \{0\}$, si se define la operación binaria $*$ sobre A mediante la regla $a * b = 4ab$. Determine el valor de verdad e indique la secuencia correcta, sobre las siguientes proposiciones.

I. $*$ es una operación binaria asociativa.

II. Su elemento neutro es $\frac{1}{4}$.

III. El inverso de $\frac{1}{8}$ es 2.

A) FFV

B) VVV

C) VVF

D) FVF

E) FVV

Ejercicio 02

Si $*$ es una operación sobre $A = \{0; 1; 2\}$ tal que su elemento neutro es 2, el único inverso de 1 es 0, el único inverso de 0 es 1 y para todo $x \in A - \{2\}$: $x * x \neq x$, halle el valor de

$$w = [0 * 1 - 0 * 0] + [1 * 1 - 1 * 0] + 0 * 2.$$

- A) 0 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

Ejercicio 03

Sea la operación binaria sobre $\mathbb{R}$, definida por $a * b = a + b - 3ab$

- Probar que $*$ es conmutativa y asociativa.
- Halle el elemento neutro.
- Resuelva la ecuación $(4 * x^{-1})^{-1} = -3$, siendo x^{-1} el inverso de x bajo la operación $*$.